Delta 11 Lösungen S. 131 / 4; 5; 6

4. a) $f'(x) = 2 \cdot (1 + 3x^2) \cdot 2 \cdot 3x = 12x(1 + 3x^2)$;
$f'(2) = 12 \cdot 2\,(1 + 3 \cdot 4) = 24 \cdot 13 = 312$

b) $f'(x) = 2 \cdot (1 - x^4) \cdot (-4x^3) = -8x^3 \cdot (1 - x^4)$;
$f'(1) = -8 \cdot (1 - 1) = 0$

c) $f'(x) = 2 \cdot (1 + 2x + x^2) \cdot (2 + 2x) = 4 \cdot (1 + x)^2 \cdot (1 + x) = 4 \cdot (1 + x)^3$;
$f'(-1) = 4 \cdot (1 + (-1))^3 = 0$

d) $f'(x) = 2 \cdot (1 - 5x) \cdot (-5) = -10 \cdot (1 - 5x)$;
$f'(0) = -10 \cdot (1 - 0) = -10$

e) $f'(x) = 2 \cdot (x^5 + 1) \cdot 5x = 10x^4(1 + x^5)$;
$f'(-1) = 10 \cdot (1 + (-1)) = 0$

f) $f'(x) = 2 \cdot [x - (3x)^2] \cdot (1 - 2 \cdot 3x \cdot 3) = (2 - 36x) \cdot (x - 9x^2);$
$f'(2) = (2 - 72) \cdot (2 - 9 \cdot 4) = -70 \cdot (-34) = 2\,380$

g) $f'(x) = 2 \cdot \left(2x + \frac{1}{4x}\right) \cdot \left(2 - \frac{4}{(4x)^2}\right) = \left(4x + \frac{1}{2x}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{4x^2}\right);$
$f'(0{,}5) = \left(4 \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2 \cdot 0{,}5}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{4 \cdot (0{,}5)^2}\right) = 3 \cdot 1 = 3$

h) $f'(x) = -2 \cdot (1 + 4x)^{-3} \cdot 4 = -\frac{8}{(1 + 4x)^3};$
$f'(0{,}5) = -\frac{8}{(1 + 4 \cdot 0{,}5)^3} = -\frac{8}{27};$

i) $f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{2x + 1}{1 - 4x}\right) \cdot \frac{(1 - 4x) \cdot 2 - (2x + 1) \cdot (-4)}{(1 - 4x)^2} = \frac{4x + 2}{1 - 4x} \cdot \frac{2 - 8x + 8x + 4}{(1 - 4x)^2};$
$= \frac{(4x + 2) \cdot 6}{(1 - 4x)^3} = \frac{24x + 12}{(1 - 4x)^3}$
$f'(-0{,}5) = \frac{24 \cdot (-0{,}5) + 12}{(1 - 4 \cdot (-0{,}5))^3} = 0$

j) $f'(x) = -4 \cdot (9 - x^2)^2 + (2 - 4x) \cdot 2 \cdot (9 - x^2) \cdot (-2x)$
$= (9 - x^2) \cdot [-36 + 4x^2 - 8x + 16x^2]$
$= (9 - x^2) \cdot (20x^2 - 8x - 36);$
$f'(3) = (9 - 9) \cdot (20 \cdot 9 - 8 \cdot 9 - 36) = 0$

k) $f'(x) = 4 \cdot (1 + x^2)^3 \cdot 2x = 8x(1 + x^2)^3;$
$f'(2) = 8 \cdot 2\,(1 + 4)^3 = 16 \cdot 125 = 2\,000$

l) $f'(x) = n \cdot (4 - x)^{n-1} \cdot (-1) = -n \cdot (4 - x)^{n-1};$
$f'(4) = -n \cdot (4 - 4)^{n-1} = 0$

m) $f'(x) = \frac{(x^2 + 1)^3 \cdot 1 - x \cdot 3 \cdot (x^2 + 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^6} = \frac{x^2 + 1 - 6x^2}{(x^2 + 1)^4} = \frac{1 - 5x^2}{(x^2 + 1)^4};$
$f'(0) = \frac{1 - 5 \cdot 0}{(0 + 1)^4} = 1$

n) $f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1 - x}{1 + x^2}\right) \cdot \frac{(1 + x^2) \cdot (-1) - (1 - x) \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x}{1 + x^2} \cdot \frac{-1 + x^2 - 2x}{(1 + x^2)^2}$
$= \frac{(2 - 2x) \cdot (x^2 - 2x - 1)}{(1 + x^2)^3};$
$f'(0) = \frac{(2 - 0) \cdot (-1)}{(1 + 0)^3} = -2$

o) $f'(x) = -\frac{4 \cdot 2 \cdot (4 + x^2) \cdot 2x}{(4 + x^2)^4} = -\frac{16x}{(4 + x^2)^3};$
$f'(-2) = \frac{32}{(4 + 4)^3} = \frac{32}{512} = \frac{1}{16}$

p) $f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{1 + x^2}{1 - x}\right) \cdot \frac{(1 - x) \cdot 2x - (1 + x^2) \cdot (-1)}{(1 - x)^2} = \frac{2 + 2x^2}{1 - x} \cdot \frac{2x - 2x^2 + 1 + x^2}{(1 - x)^2}$
$= \frac{(2 + 2x^2) \cdot (-x^2 + 2x + 1)}{(1 - x)^3};$
$f'(-1) = \frac{(2 + 2) \cdot (-1 - 2 + 1)}{(1 + 1)^3} = \frac{-8}{8} = -1$

5. a) $f(x) = u(v(x)) = (x^3)^2 + 1 = x^6 + 1;$
$g(x) = v(u(x)) = (x^2 + 1)^3;$
$g'(x) = 3 \cdot (x^2 + 1)^2 \cdot 2x = 6x \cdot (x^2 + 1)^2;$
$g''(x) = 6 \cdot (x^2 + 1)^2 + 6x \cdot 2(x^2 + 1) \cdot 2x = (x^2 + 1) \cdot (6x^2 + 6 + 24x^2)$
$= (x^2 + 1) \cdot (30x^2 + 6)$

$u(x) = x^2 + 1$	$v(x) = x^3$	$f(x) = x^6 + 1$	$g(x) = (x^2 + 1)^3$
$u'(x) = 2x$	$v'(x) = 3x^2$	$f'(x) = 6x^5$	$g'(x) = 6x \cdot (x^2 + 1)^2$
$u''(x) = 2$	$v''(x) = 6x$	$f''(x) = 30x^4$	$g''(x) = (x^2 + 1) \cdot (30x^2 + 6)$

Symmetrie:
$u(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = u(x)$ — G_u ist symmetrisch zur y-Achse
$v(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -v(x)$ — G_v ist punktsymmetrisch zum Ursprung
$f(-x) = (-x)^6 + 1 = x^6 + 1 = f(x)$ — G_f ist symmetrisch zur y-Achse
$g(-x) = [(-x)^2 + 1]^3 = (x^2 + 1)^3 = g(x)$ — G_g ist symmetrisch zur y-Achse

Extrempunkte:

$u'(x) = 2x = 0;\ x = 0$

$u''(0) = 2 > 0;$ $\qquad$ T (0 I 1) (Tiefpunkt)

$v'(x) = 3x^2 = 0;\ x = 0$

$v''(0) = 6 \cdot 0 = 0;$ $\qquad$ W (0 I 0) (Terrassenpunkt)

$f'(x) = 6x^5 = 0;\ x = 0$

$f''(0) = 30 \cdot 0 = 0;$ $\qquad$ T (0 I 1) (Tiefpunkt)

$g'(x) = 6x \cdot (x^2 + 1)^2 = 0;\ \ x = 0$

$g''(0) = 1 \cdot 6 = 6 > 0$ $\qquad$ T (0 I 1) (Tiefpunkt)

b)

$u(x) = x^5$	$v(x) = \lvert x \rvert = \begin{cases} x;\ x \geqq 0 \\ -x;\ x < 0 \end{cases}$	$f(x) = \lvert x \rvert^5 = \begin{cases} x^5;\ x \geqq 0 \\ -x^5;\ x < 0 \end{cases}$	$g(x) = \lvert x \rvert^5 = \begin{cases} x^5;\ x \geqq 0 \\ -x^5;\ x < 0 \end{cases}$
$u'(x) = 5x^4$	$v'(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } x > 0 \\ -1 \text{ für } x < 0 \end{cases}$	$f'(x) = \begin{cases} 5x^4 \text{ für } x > 0 \\ -5x^4 \text{ für } x < 0 \end{cases}$	$g'(x) = f'(x)$
$u''(x) = 20x^3$	$v''(x) = 0 \text{ für } x \neq 0$	$f''(x) = \begin{cases} 20x^3 \text{ für } x > 0 \\ -20x^3 \text{ für } x < 0 \end{cases}$	$g''(x) = f''(x)$

Symmetrie:

$u(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -u(x)$ $\qquad$ G_u ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$v(-x) = |(-x)| = |x| = v(x)$ $\qquad$ G_v ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$f(-x) = |(-x)|^5 = f(x)$ $\qquad$ G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$g(-x) = |(-x)^5| = |-x^5| = |x^5| = g(x)$ $\qquad$ G_g ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Extrempunkte:

$u'(x) = 5x = 0;\ x = 0$ $\qquad$ W (0 I 0) Terrassenpunkt

$u''(0) = 0$

T (0 I 0) ist Tiefpunkt von G_v, G_f und G_g.

c)

$u(x) = x + 1$	$v(x) = x^2 - 2x - 1$	$f(x) = x^2 - 2x$	$g(x) = x^2 - 2$
$u'(x) = 1$	$v'(x) = 2x - 2$	$f'(x) = 2x - 2$	$g'(x) = 2x$
$u''(x) = 0$	$v''(x) = 2$	$f''(x) = 2$	$g''(x) = 2$

Symmetrie:

$u(-x) = -x + 1$

$v(-x) = (-x)^2 - 2 \cdot (-x) - 1 = x^2 + 2x - 1$

$f(-x) = (-x)^2 - 2 \cdot (-x) = x^2 + 2x$

$g(-x) = 2(-x)^2 - 1 = 2x^2 - 1 = g(x)$

Von den vier Graphen G_u, G_v, G_f und G_g ist keiner punktsymmetrisch zum Ursprung und nur G_g symmetrisch zur y-Achse.

Extrempunkte:

$v'(x) = 2x - 2 = 0;\ x = 1$

$v''(1) = 2 > 0;$ $\qquad$ T_1 (1 I −2) (Tiefpunkt)

$f'(x) = 2x - 2 = 0;\ x = 1$

$f''(1) = 2 > 0;$ $\qquad$ T_2 (1 I −1) (Tiefpunkt)

$g'(x) = 2x = 0;\ x = 0$

$g''(x) = 2 > 0;$ $\qquad$ T_3 (0 I −2) (Tiefpunkt)

d)

$u(x) = x^{2n}$	$v(x) = x^{2n+1}$	$f(x) = x^{4n^2+2n}$	$g(x) = x^{4n^2+2n}$
$u'(x) = 2n \cdot x^{2n-1}$	$v'(x) = (2n + 1) \cdot x^{2n}$	$f'(x) = (4n^2 + 2n) \cdot x^{4n^2+2n-1}$	$g'(x) = f'(x)$
$u''(x) = (4n^2 - 2n) \cdot x^{2n-2}$	$v''(x) = (4n^2 + 2n) \cdot x^{2n-1}$	$f''(x) = (16n^4 + 16n^3 - 2n) \cdot x^{4n^2+2n-2}$	$g''(x) = f''(x)$

Symmetrie:

$u(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = u(x)$ $\qquad$ G_u ist symmetrisch zur y-Achse.

$v(-x) = (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1} = -v(x)$ $\qquad$ G_v ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$f(-x) = (-x)^{4n^2+2n} = (-x)^{2 \cdot (2n^2+n)} = x^{4n^2+2n} = f(x)$ $\qquad$ G_f ist symmetrisch zur y-Achse.

$g(-x) = (-x)^{4n^2+2n} = x^{4n^2+2n} = g(x)$ $\qquad$ G_g ist symmetrisch zur y-Achse.

Funktion	u	v	f	g
$-\infty < x < 0$:	$u'(x) < 0$	$v'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$g'(x) < 0$
$x = 0$	$u'(x) = 0$	$v'(x) = 0$	$f'(x) = 0$	$g'(x) = 0$
$0 < x < \infty$	$u'(x) > 0$	$v'(x) > 0$	$f'(x) > 0$	$g'(x) > 0$
Der Graph hat einen	Tiefpunkt T (0 I 0)	Terrassenpunkt W (0 I 0)	Tiefpunkt T (0 I 0)	

Es fällt auf, dass sich die Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse bei der Verkettung „durchsetzt".

6. **a)** Nullstellen:

$f(x) = \left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = 0;\ \frac{x+2}{x} = 0;\ x + 2 = 0;\ x = -2$

Verhalten für $x \to 0$ bzw. $x \to \pm\infty$:

$\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = +\infty$

G_f besitzt eine senkrechte Asymptote a_1: $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 = 1$

G_f besitzt eine waagrechte Asymptote a_2: $y = 1$.

Schnittpunkt S von G_f und a_2:

$\left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = 1$

$\frac{x+2}{x} = \pm 1$

$x + 2 = \pm x$

$x + 2 = x \quad x + 2 = -x$

$2 = 0$ (f) $\quad 2x = -2$

$x = -1$; S(−1 I 1)

b) Extrempunkte:

$f'(x) = 2 \cdot \left(\frac{x+2}{x}\right) \cdot \frac{x \cdot 1 - (x+2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x+4}{x} \cdot \frac{x-x-2}{x^2} = \frac{-4x-8}{x^3}$

$f'(x) = \frac{-4x-8}{x^3} = 0$

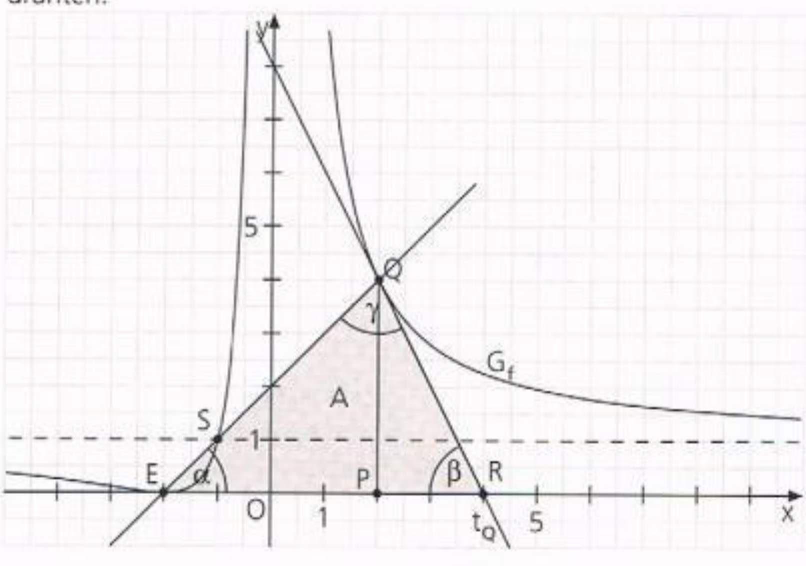
$-4x - 8 = 0$

$-4x = 8$

$x = -2$; E (−2 I 0)

x	$-\infty < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$
f'(x)	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Vorzeichenwechsel von f'(x)	–	von – nach +	–
Der Graph G_f hat einen		Tiefpunkt E (−2 I 0)	

c) Für jeden Wert von $x \in D_f$ gilt $f(x) = \left(\frac{x+2}{x}\right)^2 \geqq 0$: G_f verläuft nicht durch den III. und nicht durch den IV. Quadranten. G_f verläuft durch den I. und den II. Quadranten.



d) Tangente t_Q:

$Q\,(2 \mid 4)$ allgemein $y = m \cdot x + t$

$m = f'(2) = \frac{-4 \cdot 2 - 8}{8} = -2$

t_Q: $y = -2x + 8$. Schnittpunkt mit der x-Achse: $y = 0$; $x_R = 4$

$P\,(2 \mid 0)$; $E\,(-2 \mid 0)$; $Q\,(2 \mid 4)$; $R\,(4 \mid 0)$

Dreiecksfläche:

$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \overline{ER} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

Dreiecksumfangslänge:

$U = \overline{ER} + \overline{RQ} + \overline{QE}$

$\overline{ER} = 6$

$(\overline{RQ})^2 = (\overline{QP})^2 + (\overline{PR})^2 = 4 + 16 = 20$

$\overline{RQ} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$(\overline{QE})^2 = (\overline{EP})^2 + (\overline{PQ})^2 = 16 + 16 = 32$

$\overline{QE} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$U = 6 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} \approx 16{,}1$

Größe des kleinsten Innenwinkels φ:

$\tan\alpha = \frac{\overline{QP}}{\overline{EP}} = \frac{4}{4} = 1$; $\alpha = 45°$

$\tan\beta = \frac{\overline{QP}}{\overline{PR}} = \frac{4}{2} = 2$; $\beta \approx 63{,}4°$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$; $\gamma \approx 71{,}6°$

kleinster Innenwinkel: $\varphi = \alpha = 45°$

e) $E\,(-2 \mid 0)$, $R\,(4 \mid 0)$, $Q\,(2 \mid 4)$

$x_{S^*} = 1$

Parabel P: $y = a(x-1)^2 + b$

$E \in P$: $0 = a(-3)^2 + b$; $\quad b + 9a = 0$ (1)

$Q \in P$: $4 = a \cdot 1^2 + b$ $\quad b + a = 4$ (2)

$\underline{(2) - (1)\; -8a = 4;}$

$a = -\frac{1}{2}$ eingesetzt in (1)

$b - 4{,}5 = 0$; $b = 4{,}5$

P: $y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 4{,}5$

$S^*\,(1 \mid 4{,}5)$