Zum Aufwärmen - Lösung

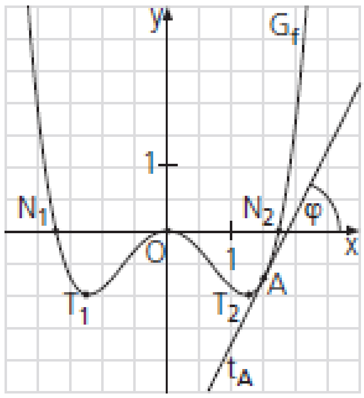
a) $f(x) = \frac{4}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^2 = \frac{4}{9}x^2(x^2 - 3) = \frac{4}{9}(x + \sqrt{3}) \cdot x^2 \cdot (x - \sqrt{3})$:
G_f hat mit der x-Achse die Punkte $N_1\ (-\sqrt{3} \mid 0)$, $O\ (0 \mid 0)$ und $N_2\ (\sqrt{3} \mid 0)$ gemeinsam; links von N_1 und rechts von N_2 verläuft G_f oberhalb der x-Achse, dazwischen (bis auf den Punkt O) unterhalb.
Da $x = 0$ eine doppelte Nullstelle von f ist, berührt G_f die x-Achse im Ursprung.

b) Wegen $f(-x) = \frac{4}{9}(-x)^4 - \frac{4}{3}(-x)^2 = \frac{4}{9}x^4 - \frac{4}{3}x^2 = f(x)$ ist G_f symmetrisch zur y-Achse.

c) $N_1\ (-\sqrt{3} \mid 0)$, $O\ (0 \mid 0)$ und $N_2\ (\sqrt{3} \mid 0)$ [vgl. a)]

d) Für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to \infty$; G_f besitzt keine (waagrechte oder) schräge Asymptote.

e) $f'(x) = \frac{16}{9}x^3 - \frac{8}{3}x$; $f''(x) = \frac{16}{3}x^2 - \frac{8}{3}$;
$f'(x) = 0$: $x\left(\frac{16}{9}x^2 - \frac{8}{3}\right) = 0$;
(1) $x_1 = 0$; $f''(0) = -\frac{8}{3} < 0$: Der Punkt $O\ (0 \mid 0)$ ist Hochpunkt von G_f.
(2) $\frac{16}{9}x^2 - \frac{8}{3} = 0$; $x^2 = \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{16} = \frac{3}{2}$; $x_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \approx 1{,}2$; $x_3 = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{6}$;
$f''(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{16}{3} \cdot \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3} > 0$; $f(\pm\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 - 2 = -1$:
Die Punkte $T_1\ (-\frac{1}{2}\sqrt{6} \mid -1)$ und $T_2\ (\frac{1}{2}\sqrt{6} \mid -1)$ sind Tiefpunkte von G_f.

f)


g) $y_A = f(1{,}5) = \frac{4}{9} \cdot (1{,}5)^4 - \frac{4}{3} \cdot (1{,}5)^2 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$; $A\ (\frac{3}{2} \mid -\frac{3}{4})$;
$m_{t_A} = f'(\frac{3}{2}) = \frac{16}{9} \cdot (1{,}5)^3 - \frac{8}{3} \cdot 1{,}5 = 6 - 4 = 2$;
t_A: $y = 2x + t$; $A \in t_A$: $-\frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{3}{2} + t$; $t = -3\frac{3}{4}$;
t_A: $y = 2x - 3{,}75$
$\tan \varphi = m_{t_A} = 2$; $\varphi \approx 63°$
(φ: Größe der spitzen Winkel zwischen t_A und der x-Achse)
Größen der spitzen Dreiecksinnenwinkel etwa 63° und (90° − 63° =) 27°.