Übung

S. 131 / 4f

$f(x) = \left[x - (3x)^2\right]^2$

äußere Funktion: u(x) = x^2 u`(x) = $2 \cdot x$

innere Funktion: v(x) = x - $\underline{(3x)^2}$

ist hier auch nochmal verkettet

v´(x) = $1 - 2 \cdot (3x) \cdot 3$ → hier muss nochmal nachdifferenziert werden!

Kettenregel: $f'(x) = 2 \cdot \left[x - (3x)^2\right] \cdot [1 - 2 \cdot (3x) \cdot 3] = 2 \cdot [x - (3x)^2] \cdot (1 - 18x)$

$f'(x) = 2 \cdot [x - 9x^2] \cdot (1 - 18x)$

Hier liegt also eine zweimal verkettete Funktion vor, das bedeutet, die Kettenregel muss auch zweimal angewendet werden.

Du kannst natürlich auch f(x) vereinfachen und dann „normal" mit der Kettenregel ableiten:

$f(x) = \left[x - (3x)^2\right]^2 = \left[x - 9x^2\right]^2$

Kettenregel: $f'(x) = 2 \cdot \left[x - 9x^2\right] \cdot (1 - 18x)$

Den Term lässt du bitte in der faktorisierten (d.h. als Produkt) Form stehen. Hier können wir die Nullstellen leichter ablesen.

$f'(2) = ..$.

S. 131 / 4j

$f(x) = (2 - 4x)\left(9 - x^2\right)^2$

hier brauchen wir zunächst die Produktregel $f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$

mit $g(x) = (2 - 4x)$ und $h(x) = \left(9 - x^2\right)^2$

weil h(x) eine verkettete Funktion ist, brauchen wir für h´(x) aber auch noch die Kettenregel:

$h'(x) = 2 \cdot \left(9 - x^2\right) \cdot (-2x) = -4x \cdot (9 - x^2)$

Anwenden der Produktregel:

$f'(x) = (2 - 4x) \cdot \left[-4x \cdot \left(9 - x^2\right)\right] + (-4) \cdot \left(9 - x^2\right)^2$

Der Term der Ableitung ist eine **Summe**. Um ihn soweit wie möglich zusammenzufassen und gleichzeitig die faktorisierte Form beizubehalten, **klammern** wir hier **aus**:
In beiden Summanden sind die Faktoren **4** und **(9-x^2)** enthalten.

$f'(x) = 4\left(9 - x^2\right) \cdot [(2 - 4x) \cdot (-x) + (-1) \cdot \left(9 - x^2\right)]$ | ausmultiplizieren

$= 4\left(9 - x^2\right) \cdot [-2x + 4x^2 - 9 + x^2]$ | zusammenfassen

$= 4\left(9 - x^2\right) \cdot [-2x + 5x^2 - 9]$

$f'(3) = ..$.

Ein ausführliches Beispiel, wie die Verkettung in einer Quotientenregel funktioniert, findest du im folgenden Video. Es genügt hierfür, die ersten 10 Minuten anzuschauen.

https://youtu.be/mD2jM5dqxNA

Hier kommt nochmal S. 131/4i).
(Die war schon im letzten Auftrag, aber eure Rückmeldungen zeigen, dass es da Probleme gab.)

$$f(x) = \left(\frac{2x+1}{1-4x}\right)^2$$

Los geht´s:
Die äußerste Funktion ist „irgendwas hoch 2", also $u(x) = x^2$.
Das muss zuerst abgeleitet werden, $u´(x) = 2x$.
Danach sieht man innen einen Bruch, $v(x) = \frac{2x+1}{1-4x}$.
Sowohl im Zähler als auch Nenner steht x dabei, also muss die Quotientenregel her.

Fangen wir an:

$$u´(v(x)) = 2\cdot\left(\frac{2x+1}{1-4x}\right)^1$$

innen abgeleitet $v´(x) = \frac{(1-4x)\cdot 2-(2x+1)\cdot(-4)}{(1-4x)^2}$

insgesamt also: $f´(x) = u´(v(x))\cdot v´(x) = 2\cdot\left(\frac{2x+1}{1-4x}\right)^1\cdot\frac{(1-4x)\cdot 2-(2x+1)\cdot(-4)}{(1-4x)^2}$

Das kann man noch vereinfachen: $f´(x) = \frac{(4x+2)\cdot(2-8x+8x+4)}{(1-4x)\text{^}3} = \frac{24x+12}{(1-4x)}$