Lösungen zu Kapitel 4 (Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und ihre Ableitung)

4.1 Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Eigenschaften von Graphen von Potenzfunktionen

mit positiven Exponenten

- Sie verlaufen durch (0/0) und (1/1).
- Sie sind streng monoton steigend.

mit negativen Exponenten

- Sie verlaufen durch (1/1).
- Sie sind streng monoton fallend.
- Die x- und y-Achse sind Asymptoten.

Delta 11 Lösungen S. 141 / 3

3. ①: B $x = 0;\ y = 2$: blauer Graph
②: A $x = 0;\ y = 0;\ x = 1;\ y = 2$: roter Graph
③: D $x = 0;\ y = 0;\ x = 1;\ y = 1$: grüner Graph
④: C $x = 0;\ y = 2 - \sqrt{2}$ schwarzer Graph
$x = -2;\ y = 2$

4.2 Ableitung von Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten

Beispiele:

2. $f(x) = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$ $\qquad f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

3. $f(x) = \sqrt{x}\cdot sin(x) = x^{\frac{1}{2}}\cdot sin(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot sin(x) + x^{\frac{1}{2}}\cdot cos(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot sin(x) + \sqrt{x}\cdot cos(x)$$

4. $f(x) = \frac{4}{\sqrt[4]{x}} = 4x^{-\frac{1}{4}}$ $\qquad f'(x) = 4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot x^{-\frac{5}{4}} = -x^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$

5. $f(x) = \sqrt[3]{8-x} = (8-x)^{\frac{1}{3}}$

$$f(x) = \frac{1}{3}\cdot(8-x)^{-\frac{2}{3}}\cdot\mathbf{(-1)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$$

Nachdifferenzieren

Delta 11 Lösungen S. 140 / 1

1. a) $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

b) $f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$

c) $f(x) = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3} \cdot (\sqrt{x})^2 = \sqrt{3} \cdot x$ (da $x > 0$)
$f'(x) = \sqrt{3}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^6} = (\sqrt[3]{x})^6 = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (da $x > 0$)
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = (\sqrt{2x})^{-1} = (2x)^{-\frac{1}{2}}$
$f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (2x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot 2 = -(2x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{(2x)^3}}$

f) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} \cdot \sin x$
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot \sin x + x^{\frac{1}{2}} \cdot \cos x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$

g) $f(x) = (4x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (4x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8x = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}$

h) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}}$
$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

Aufgabe

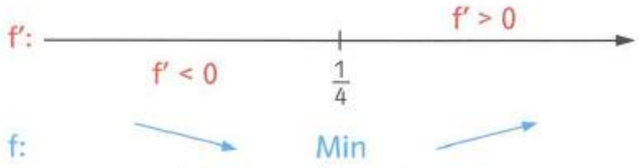
$f(x) = x - \sqrt{x}$

Definitionsmenge: einzige Einschränkung wird durch $\sqrt{x}$ vorgegeben
da unter der Wurzel nichts Negatives stehen darf, muss gelten: $x \geq 0$
$D_{f_{max}} = IR_0^+ = [0;\ \infty[$

Nullstellen:
$x - \sqrt{x} = 0$
$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$
$\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 1) = 0$
Ein Produkt wird null, wenn einer der beiden Faktoren null wird:
$\sqrt{x} = 0$ => $x_1 = 0$
$\sqrt{x - 1} = 0$ $\quad |^2$
$x - 1 = 0$ => $x_2 = 1$

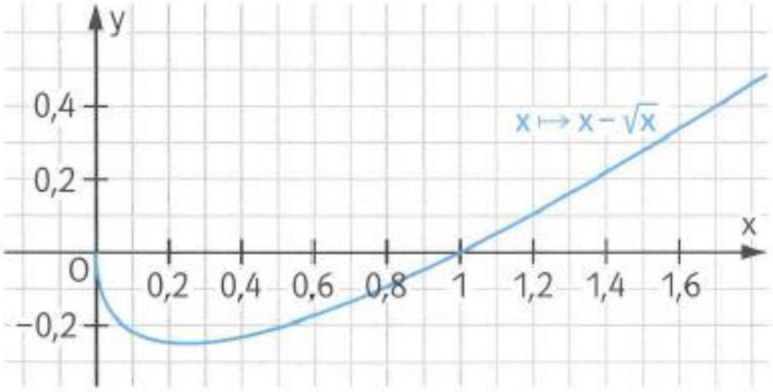
Extremwerte:
$f(x) = x - \sqrt{x} = x - x^{\frac{1}{2}}$
$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \quad \left| + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right.$
$1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad |\cdot 2\sqrt{x}$
$2\sqrt{x} = 1 \quad |:2$
$\sqrt{x} = 0{,}5 \quad |^2$
$x = 0{,}25$

Monotonieverhalten von f:



Tiefpunkt: $f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$; $T\left(\frac{1}{4}\middle|-\frac{1}{4}\right)$
Hochpunkt $N(0|0)$, da $f(x) < 0$ im Intervall $]0;1[$ und 0 die linke Grenze von D_f ist.

Zeichnung:



Delta 11 Lösungen S. 141 / 4

4. a) $D_{f\,max}$: $4 - x^2 \geqq 0$ muss gelten damit f definiert ist.

$x^2 \leqq 4$; $-2 \leqq x \leqq 2$; $D_{f\,max} = [-2; 2]$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2} = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad \sqrt{4 - x^2} = 0$

$4 = x^2$

$x_2 = 2$; $\qquad x_3 = -2$

$S_1\ (0 \mid 0)$; $\quad S_2\ (2 \mid 0)$; $\quad S_3\ (-2 \mid 0)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = 0 \cdot \sqrt{4 - 0} = 0$

$T\ (0 \mid 0) = S_1$

b) Da für jeden Wert von $x \in D_f$ gilt $f(-x) = (-x) \cdot \sqrt{4 - (-x)^2} = -x \cdot \sqrt{4 - x^2} = -f(x)$, ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{4 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$;

$f'(x) = 0$: $\sqrt{4 - x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad | \cdot \sqrt{4 - x^2}$

$4 - x^2 = x^2$

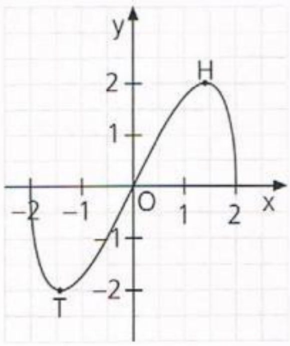
$x^2 = 2$

$x_T = -\sqrt{2} \qquad y_T = f(x_T) = -2; \qquad T\ (-\sqrt{2} \mid -2)$

$x_H = \sqrt{2} \qquad y_H = F(x_H) = 2; \qquad H\ (\sqrt{2} \mid 2)$

$(\overline{TH})^2 = \sqrt{(x_H - x_T)^2 + (y_H - y_T)^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 4\sqrt{3}$

d)



Delta 11 Lösungen S. 144 / 7

7. a) $f(x) = \cos\sqrt{x}$; $D_f = \mathbb{R}_0^+$

$f'(x) = -\sin\sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

$f'(\pi^2) = -\frac{\sin\sqrt{\pi^2}}{2\sqrt{\pi^2}} = 0$

b) $f(x) = \sqrt[3]{4x^2}$; $D_f = \mathbb{R}$. Für $x > 0$ gilt $f(x) = \sqrt[3]{4} \cdot x^{\frac{2}{3}}$;

$f'(x) = \sqrt[3]{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$;

$f'(1) = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{3} \approx 1{,}06.$

c) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-4} = 2 \cdot (x-4)^{\frac{1}{2}}$; $D_f = [4; \infty[$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$

$f'(8) = \frac{1}{\sqrt{8-4}} = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} = \left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$; $D_f =]1; 2]$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2-x}{x-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(x-1)\cdot(-1)-(2-x)\cdot 1}{(x-1)^2} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2-x}{x-1}}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-\sqrt{x-1}}{2 \cdot \sqrt{2-x} \cdot (x-1)^2}$

$f'(1{,}5) = \frac{-\sqrt{1{,}5-1}}{2 \cdot \sqrt{2-1{,}5} \cdot (1{,}5-1)^2} = -\frac{\sqrt{0{,}5}}{2 \cdot \sqrt{0{,}5} \cdot (0{,}5)^2} = -2$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{4+x}} = \left(\frac{4-x}{4+x}\right)^{\frac{1}{2}}$; $D_f =]-4; 4]$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4-x}{4+x}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(4+x)\cdot(-1)-(4-x)\cdot 1}{(4+x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{4-x}{4+x}}} \cdot \frac{-8}{(4+x)^2} = -\frac{4\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x} \cdot (4+x)^2}$

$f'(0) = -\frac{4\sqrt{4}}{\sqrt{4} \cdot 4^2} = -\frac{1}{4}$

f) $f(x) = [\sin(\sqrt{x})]^2 + [\cos(\sqrt{x})]^2 = 1$; $D_f = \mathbb{R}_0^+$

$f'(x) = 0$ also auch $f'(4) = 0$