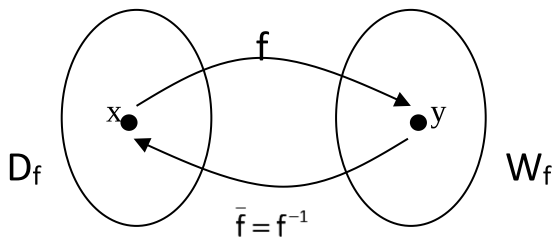
4.3 Die Umkehrfunktion

Eine Funktion ordnet jedem $x \in D_f$ genau einen reellen Funktionswert $y \in W_f$ zu.

Definition: Eine Funktion f heißt **umkehrbar**, wenn jedem Element der Wertemenge von f auch **eindeutig** ein Element der Definitionsmenge von f zugeordnet werden kann.
Diese umgekehrte Zuordnung heißt dann die **Umkehrfunktion** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.



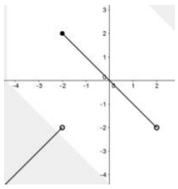
Wichtig:

(1) $G_{f^{-1}}$ entsteht aus G_f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten y = x.

(2) Im Allgemeinen erhält man bei der Umkehrung einer Zuordnung keine Funktion. Man erhält nur dann eine Umkehrfunktion, wenn jede Parallele zur *x*-Achse den Graphen höchstens einmal schneidet.
Mathematisch bedeutet das:

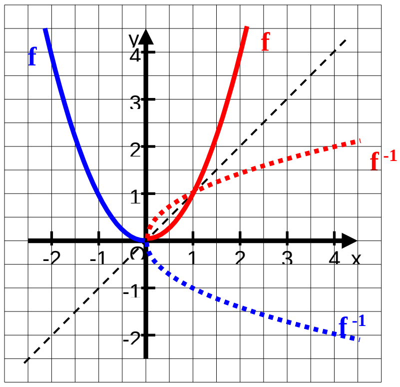
Ist eine Funktion streng monoton (d.h. für f differenzierbar: $f'(x) > 0$ bzw. ($f'(x) < 0$), so ist die Funktion umkehrbar.

Aber: f streng monoton in I => f umkehrbar
f umkehrbar in I ≠> f streng monoton



Häufig kann man deswegen eine Funktion nicht auf ihrem gesamten Definitionsbereich umkehren, sondern muss den Definitionsbereich so einschränken, so dass die Funktion dort streng monoton (steigend oder fallend) ist.

Bsp: $f(x) = x^2$
nur der monotone Ast ist jeweils umkehrbar.



(3) $ID_f = W_{f^{-1}}$ und $W_f = ID_{f^{-1}}$
d.h. auch Definitions- und Wertemenge werden vertauscht.

(4) Rechnerische Bestimmung der Funktionsgleichung der Umkehrfunktion:
① Tausche x und y: $x = f(y)$
② Löse nach y: $y = f^{-1}(x)$

Beispiele:

(1) $f(x) = 2x + 1$, $D_f = IR$

Es gilt: $f'(x) = 2 > 0$

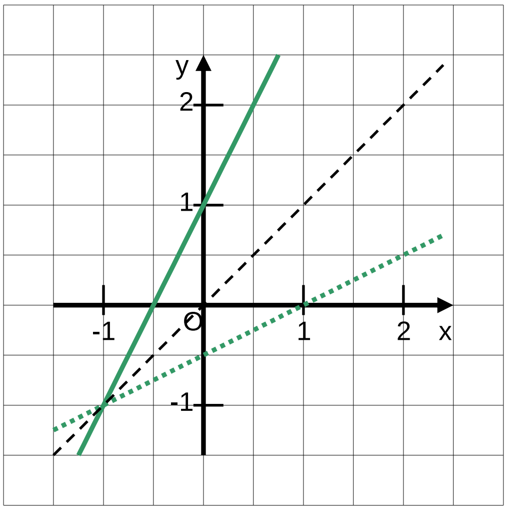
$\Rightarrow$ f ist streng monoton steigend

$\Rightarrow$ umkehrbar:

① Tausche x und y: $x = 2y + 1$

② Löse nach y: $y = \frac{1}{2}(x - 1)$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ mit $D_{f^{-1}} = IR$



(2) $f(x) = \frac{2}{x-3}$, $D_f = IR \setminus \{3\}$

Es gilt: $f'(x) = -2(x-3)^{-2} = \frac{-2}{(x-3)^2} < 0$

$\Rightarrow$ f ist streng monoton fallend

$\Rightarrow$ umkehrbar:

① Tausche x und y: $x = \frac{2}{y-3}$

② Löse nach y: $f^{-1}(x) = \frac{2}{x} + 3$, $D_{f^{-1}} = IR \setminus \{0\}$