1.

	f(x)	x_0	f'(x)	$f'(x_0)$
a)	$f(x) = \sin x + 2\cos x$	0	$f'(x) = \cos x - 2\sin x$	1
b)	$f(x) = \sin[2(x + \pi)] = \sin(2x)$	π	$f'(x) = 2\cos(2x)$	2
c)	$f(x) = \cos(-x) = \cos x$	$\frac{\pi}{2}$	$f'(x) = -\sin x$	-1
d)	$f(x) = (1 - \cos x)^2$	$\frac{\pi}{3}$	$f'(x) = 2(1 - \cos x) \cdot \sin x$	$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
e)	$f(x) = \frac{2}{\sin x}$; $\sin x \neq 0$	$-\frac{\pi}{2}$	$f'(x) = \frac{-2\cos x}{(\sin x)^2}$	0
f)	$f(x) = 2\sin x \cos x$	$\frac{\pi}{4}$	Produktregel $f'(x) = 2\cos x \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \sin x$ $= 2[(\cos x)^2 - (\sin x)^2]$	0
g)	$f(x) = \sin(2x)$	2π	$f'(x) = 2\cos(2x)$	2
h)	$f(x) = [\sin(2x)]^2 + [\cos(-2x)]^2 =$ $= [\sin(2x)]^2 + [\cos(2x)]^2 = 1$	$\frac{\pi}{5}$	$f'(x) = 0$	0
i)	$f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$; $x \neq 0$	$\frac{1}{2}$	$f'(x) = -\frac{\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x}$	$-4\pi \cdot 1 = -4\pi$
j)	$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\cos x \neq 0$	0	$f'(x) = \frac{(\cos x)^2 - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$	1
k)	$f(x) = \frac{1}{2 - \cos x}$	$\frac{\pi}{2}$	$f'(x) = \frac{-[-(-\sin x)]}{(2 - \cos x)^2} = \frac{-\sin x}{(2 - \cos x)^2}$	$-\frac{1}{4}$

2. a) $f(-x) = -[\cos(-x)]^2 - \cos(-x) + 2 = -(\cos x)^2 - \cos x + 2 = f(x)$ für jeden Wert von $x \in D_f$:
G_f ist symmetrisch zur y-Achse.

b) x-Achsenpunkte: $f(x) = 0$; Nullstellen
$-(\cos x)^2 - \cos x + 2 = 0$; $| \cdot (-1)$ (nur um die Vorzeichen schöner zu machen)
$(\cos x)^2 + \cos x - 2 = 0$; Substitution, d.h. statt cosx z.B. a schreiben $\Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$
$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$
$a_1 = 1$ und $a_2 = -2$
$\cos x_1 = 1$ [$\cos x_2 = -2$] geht nicht, da $\cos x$ $[-1;1]$
$(\cos x + 2)(\cos x - 1) = 0$;
$\cos x + 2 = 0$: keine Lösungen
$\cos x - 1 = 0$; $\cos x = 1$; $x = 0 \in D_f$;
O (0 | 0): G_f verläuft durch O (0 | 0).
$\cos x = \cos(-x)$ $f'(x) = -2\cos x \cdot (-\sin x) - (-\sin x) = \sin x \cdot (2\cos x + 1)$; $f'(0) = 0$:
G_f berührt die x-Achse im Ursprung.

Da dort die Steigung = 0 ist   Nachdifferenziert $\sin(-x) = -\sin x$

Produktregel

c) $f''(x) = \cos x \cdot (2 \cos x + 1) + \sin x \cdot (-2 \sin x) = 2(\cos x)^2 + \cos x - 2(\sin x)^2$;

$f'(x) = 0$: (notwendig für Extrema)

(1) $\sin x = 0$; $x_1 = 0 \in D_f$; $x_2 = \pi \in D_f$; $x_3 = -\pi \in D_f$

(2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x_4 = \frac{2\pi}{3} \in D_f$; $x_5 = -\frac{2\pi}{3} \in D_f$;

Statt $f''(x)$ geht natürlich auch eine Monotonietabelle möglich

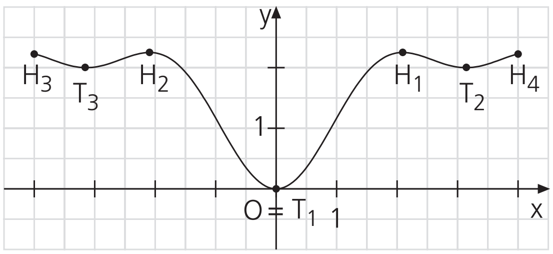
$f''(0) = 2 + 1 - 0 = 3 > 0$; $f(0) = 0$; Tiefpunkt $T_1\ (0 \mid 0) = O$

$f''(\pm \pi) = 2 - 1 - 0 = 1 > 0$; $f(\pm \pi) = 2$; Tiefpunkte $T_2\ (\pi \mid 2) = 0$ und $T_3\ (-\pi \mid 2)$

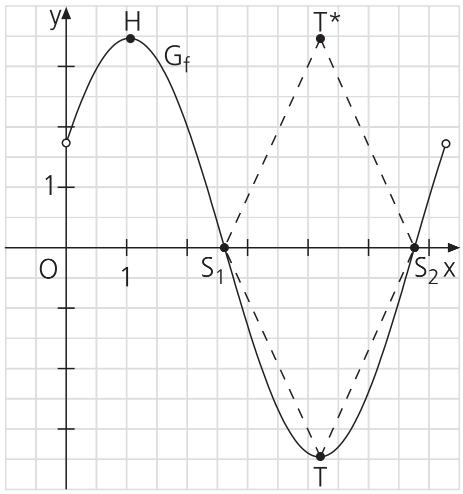
$f''(\pm \frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} < 0$; $f(\pm \frac{2\pi}{3}) = 2\frac{1}{4}$: Hochpunkte $H_1\ (\frac{2\pi}{3} \mid 2\frac{1}{4})$ und $H_2\ (-\frac{2\pi}{3} \mid 2\frac{1}{4})$

G_f besitzt außerdem die Hochpunkte $H_3\ (4 \mid f(4))$ und $H_4\ (-4 \mid f(-4))$ $[f(4) = f(-4) \approx 2{,}23]$.

d)



3. a) x-Achsenpunkte:



$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$; $\mid : (3 \cos x)$ $(\cos x \neq 0)$

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$; $\mid -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x_1 = \frac{5\pi}{6} = 2{,}617 \ldots \in D_f$;

$x_2 = \frac{11\pi}{6} = 5{,}759 \ldots \in D_f$:

G_f schneidet die x-Achse in den Punkten $S_1\ (\frac{5\pi}{6} \mid 0)$ und $S_2\ (\frac{11\pi}{6} \mid 0)$. Wegen $0 \notin D_f$ besitzt G_f keinen y-Achsenpunkt.

b) Extrempunkte:

$f'(x) = 3 \cos x - \sqrt{3} \sin x$;

$f''(x) = -3 \sin x - \sqrt{3} \cos x = -f(x)$;

$f'(x) = 0$:

$3 \cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$; $\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$; $\tan x = \sqrt{3}$;

$x_3 = \frac{\pi}{3} = 1{,}047\ldots \in D_f$;

$f(\frac{\pi}{3}) = 3 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$;

$x_4 = \frac{4\pi}{3} = 4{,}188\ldots \in D_f$;

$f(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = -2\sqrt{3}$;

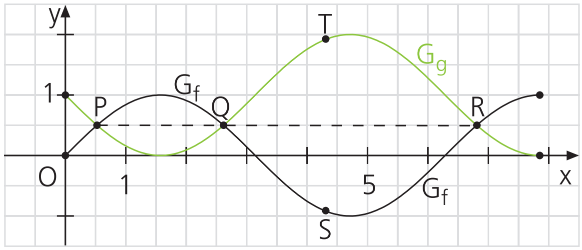
$f''(\frac{\pi}{3}) = -f(\frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{3} < 0$; $f''(\frac{4\pi}{3}) = -f(\frac{4\pi}{3}) = 2\sqrt{3} > 0$:

G_f besitzt den Hochpunkt $H\ (\frac{\pi}{3} \mid 2\sqrt{3})$ und den Tiefpunkt $T\ (\frac{4\pi}{3} \mid -2\sqrt{3})$.

c) Da seine Diagonalen $[S_1S_2]$ und $[TT^*]$ einander senkrecht halbieren, ist das Viereck $S_1TS_2T^*$ eine Raute:

$U_{S_1TS_2T^*} = 4 \cdot \overline{S_1T} = 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{\pi^2 + 48} \approx 15{,}2$

$A_{S_1TS_2T^*} = 2 \cdot A_{S_1TS_2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2\sqrt{3} = 2\pi\sqrt{3} \approx 10{,}9$



4. a) Gemeinsame Punkte:

$\sin x = 1 - \sin x$; $2 \sin x = 1$; $\sin x \frac{1}{2}$;

$x_P = \frac{\pi}{6}$; $x_Q = \frac{5\pi}{6}$; $x_R = x_P + 2\pi = \frac{13\pi}{6}$;

$y_P = y_Q = y_R = \frac{1}{2}$;

$\overline{PQ} = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$;

$\overline{QR} = \frac{13\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$:

[QR] ist doppelt so lang wie [PQ];
also ist [QR] um 100% länger als [PQ].

b) Für $x_Q < a < x_R$, also für $\frac{5\pi}{6} < a < \frac{13\pi}{6}$, gilt $\overline{ST} = d(a) = g(a) - f(a) = 1 - \sin \alpha - \sin \alpha = 1 - 2\sin \alpha$;
d(a) ist also die Länge der Strecke [ST].

$d'(a) = -2 \cos \alpha$;

$d'(a) = 0$: $-2\cos a = 0$; $\cos a = 0$;

$a = \frac{3\pi}{2}$;

$\frac{5\pi}{6} < a < \frac{3\pi}{2}$; $d'(a) > 0$;

$\frac{3\pi}{2} < a < \frac{13\pi}{6}$; $d'(a) < 0$, also an der Stelle $\frac{3\pi}{2}$ Vorzeichenwechsel von + nach –:

Für $a = a^* = \frac{3\pi}{2}$ ist d(a) maximal;

$d_{max} = d\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 2\sin \frac{3\pi}{2} = 1 + 2 = 3$.

5. $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = a \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$;

$F(x) = -a \cos x + C$; Probe: $(-a \cos x)' = -a(-\sin x) = a \sin x = f(x)$ ✓

$F\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{a}{2}\sqrt{2} + C = \frac{a}{2}\sqrt{2}$: $C = 0$

F: $F(x) = -a \cos x$; $D_F =]-\frac{\pi}{4}; \pi[$;

$f'(x) = a \cos x$; $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{a}{2}\sqrt{2}$;

$F'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{a}{2}\sqrt{2}$;

G_F und G_f schneiden einander in S senkrecht:

$\frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{a}{2}\sqrt{2}\right) = -1$;

$-\frac{a^2}{2} = -1$; $a^2 = 2$; $a \in \mathbb{R}^+$:

$a^* = \sqrt{2}$

6. $f(x) = 2 \cdot |\sin x|$;

$g(x) = 2\sin x$; $g'(x) = 2\cos x$; $g'(\pi) = -2$;

$\tan \varphi = -2$; $\varphi \approx 116{,}6°$:

Die linke Halbtangente an G_f in P bildet mit der x-Achse einen Winkel von etwa 116,6°, und die rechte Halbtangente bildet mit der x-Achse einen Winkel von $180° - \varphi \approx 63{,}4°$; deshalb bilden die beiden Halbtangenten an G_f im Punkt P miteinander einen Winkel der Größe $2\varphi - 180° \approx 53°$.