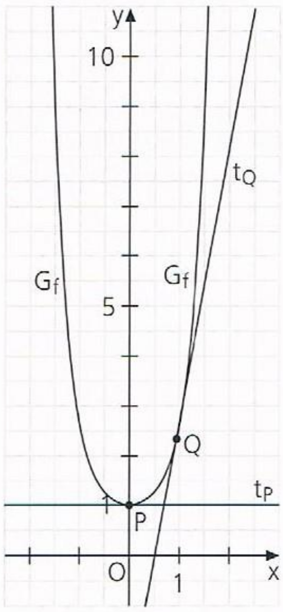
Delta 11 Lösungen S. 152 / 7 b; 9

b)



$e^{x^2} = 1$; $x = 0$: P (0 | 1)

$f(1) = e$: Q (1 | e)

$f'(x) = 2xe^{x^2}$;

$f'(0) = 0$; $f'(1) = 2e$

t_P: $y = 0$

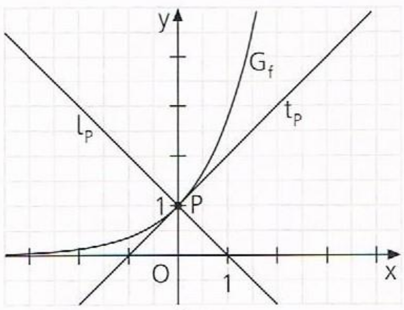
t_Q: $y = 2ex + t$

$Q \in t_Q$: $e = 2e + t$; $t = -e$

t_Q: $y = 2ex - e$

$\tan \varphi = 2e$; $\varphi \approx 79{,}6°$

9.



P (0 | 1) $f'(x) = e^x$

$f'(0) = 1$; $m_{t_P} = 1$; $m_{l_P} = -1$

t_P: $y = x + 1$; l_P: $y = -x + 1$

Die Eckpunkte des Dreiecks sind S (–1 | 0), E (1 | 0) und P (1 | 1).

Das Dreieck SEP ist gleichschenklig-rechtwinklig. $A_{SEP} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$.

Größe der Innenwinkel: 45°; 45° und 90°.

Delta 11   Lösungen   S. 153 / 13 a, c

13. a) (1) Da $f(-x) = (e^{-x} - 1)^2 = \left(\frac{1}{e^x} - 1\right)^2 = \left(\frac{1 - e^x}{e^x}\right)^2 \neq f(x)$ ist, ist G_f nicht symmetrisch zur y-Achse.

(2) Da $f(-x) \neq -f(x)$ ist, ist G_f nicht punktymmetrisch zum Ursprung [vgl. (1)].

(3) x-Achsenpunkte: $f(x) = (e^x - 1)^2 = 0$

$e^x = 1$; $x = 0$; $S\,(0 \mid 0) = O\,(0 \mid 0)$

y-Achsenpunkt: $f(0) = 0$: $O\,(0 \mid 0)$

(4) Extrempunkte:

$f'(x) = 2(e^x - 1) \cdot e^x = 2(e^{2x} - e^x)$

$f''(x) = 2(2e^{2x} - e^x)$

$f'(x) = 0$; $e^x = 1$; $x = 0$

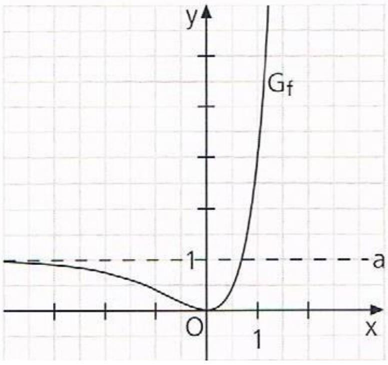
$f''(0) = 2 \cdot (2 - 1) = 2 > 0$

Der Ursprung ist Tiefpunkt des Graphen G_f.

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x - 1)^2 = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x - 1)^2 = 1$

G_f hat die Gerade a: y = 1 als waagrechte Asymptote.



Monotonie:

x	$-\infty < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
VZW von $f'(x)$		von – nach +	
G_f	smf	Tiefpunkt	sms

b) (1) Da $f(-x) = e^{-x}(e^{-x} + 2) = \frac{1 + 2e^x}{e^{2x}} \neq f(x)$ ist, ist G_f nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

(2) Da $f(-x) \neq -f(x)$ ist, ist G_f nicht punktsymmetrisch zum Ursprung.

(3) x-Achsenpunkte:

$e^x(e^x - 2) = 0$; $e^x > 0$

$e^x = 2$; $x = \ln 2$: $S\,(\ln 2 \mid 0)$

y-Achsenpunkt:

$f(0) = e^0(e^0 - 2) = -1$: $T\,(0 \mid -1)$

(4) Extrempunkte:

$f'(x) = e^x(e^x - 2) + e^x \cdot e^x = e^x(e^x - 2 + e^x) = e^x(2e^x - 2) = 2e^x(e^x - 1)$

$f''(x) = 2e^x(e^x - 1) + 2e^x \cdot e^x = 2e^x(e^x - 1 + e^x) = 2e^x(2e^x - 1)$

$f'(x) = 0$: $2e^x(e^x - 1) = 0$;

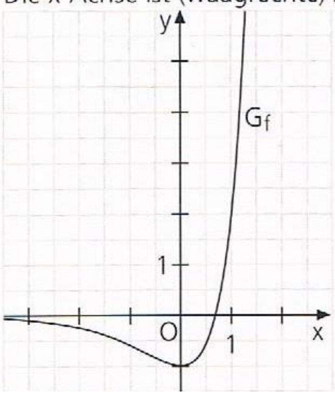
$e^x > 0$; $e^x - 1 = 0$: $x = 0$

$f''(0) = 2 \cdot (2 - 1) = 2 > 0.$

G_f hat den Tiefpunkt $T\,(0 \mid -1)$.

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} e^x (e^x - 2) = \infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x (e^x - 2) = 0$

Die x-Achse ist (waagrechte) Asymptote von G_f.



Monotonie:

x	$-\infty < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
VZW von $f'(x)$		von – nach +	
G_f	smf	Tiefpunkt	sms

c) (1) Da $f(-x) = \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} + 1} = \frac{1 - 2e^x}{1 + e^x} \neq f(x)$ ist, ist G_f nicht symmetrisch zur y-Achse.

(2) Da $f(-x) \neq -f(x)$ ist, ist G_f nicht punktsymmetrisch zum Ursprung.

(3) x-Achsenpunkt(e):

$\frac{e^x - 2}{e^x + 1} = 0$; $e^x - 2 = 0$; $e^x = 2$; $x = \ln 2$; $S\,(\ln 2 \mid 0)$

y-Achsenpunkt:

$f(0) = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$; $T\,(0 \mid -\frac{1}{2})$

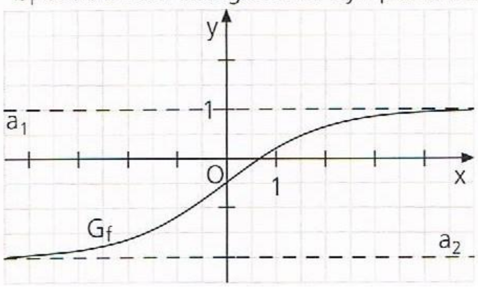
(4) Extrempunkte:

$f'(x) = \frac{(e^x + 1) \cdot e^x - (e^x - 2) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{3e^x}{(e^x + 1)^2}$

Für jeden Wert von $x \in D_f$ gilt $f'(x) > 0$: G_f besitzt keinen Extrempunkt.

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \frac{-2}{1} = -2$

G_f besitzt zwei waagrechte Asymptoten: a_1: $y = 1$ und a_2: $y = -2$



Monotonie: $f'(x) > 0$ für alle $x \in IR$

d) (1) und (2) $f(-x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -\frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -f(x) \neq f(x)$

G_f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse, jedoch punktsymmetrisch zum Ursprung

(3) x-Achsenpunkt(e):

$\frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = 0; \quad e^{2x} = 1; \quad x = 0; \; S\,(0 \mid 0)$

y-Achsenpunkt: $f(0) = 0$: $S\,(0 \mid 0)$

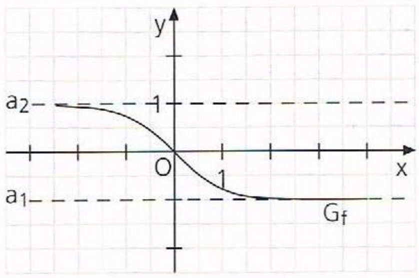
(4) Extrempunkte:

$$f'(x) = \frac{(1 + e^{2x})(-2e^{2x}) - (1 - e^{2x}) \cdot 2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{2e^{2x}(-1 - e^{2x} - 1 + e^{2x})}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{-4e^{2x}}{(1 + e^{2x})^2} < 0$$

für jeden Wert von $x \in D_f$: G_f besitzt keinen Extrempunkt.

(5) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{e^{2x}} - 1}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = -1; \; \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \frac{1}{1} = 1$

G_f besitzt zwei waagrechte Asymptoten: a_1: $y = -1$ und a_2: $y = 1$.



Monotonie: $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Delta 11 Lösungen S. 154 / 19

19. a) $f(0) = \frac{4(1 - 1)}{1} = 0$; $O \in G_f$.

$f(x) = 4e^{-x} - 4e^{-2x}$;

$f'(x) = -4e^{-x} - 4 \cdot (-2)e^{-2x} = -4e^{-x} + 8e^{-2x}$

$f'(0) = -4 + 8 = 4; \quad \tan \varphi = 4; \quad \varphi \approx 76{,}0°$

b) $f'(x) = -4e^{-x} + 8e^{-2x} = \frac{8 - 4e^{x}}{e^{2x}} = \frac{4(2 - e^{x})}{e^{2x}}$

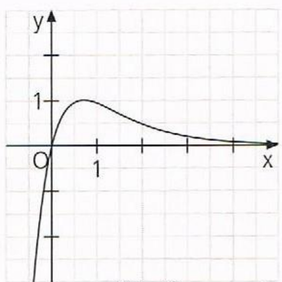
$f'(x) = 0; \quad 2 - e^{x} = 0; \quad x = \ln 2; \quad f(\ln 2) = \frac{4}{4} = 1$

x	$-\infty < x < \ln 2$	$x = \ln 2$	$\ln 2 < x < +\infty$
$f'(x)$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$		von + nach –	
G_f	steigt streng monoton	hat einen Hochpunkt $H\,(\ln 2 \mid 1)$	fällt streng monoton

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4(e^{x} - 1)}{e^{2x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4\left(\frac{1}{e^{x}} - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{1} = 0$:

Die x-Achse ist horizontale Asymptote von G_f.

d)



e) f^*: $f^*(x) = \frac{4(e^{x} - 1)}{e^{2x}} + 2 = \frac{4e^{x} - 4 + 2e^{2x}}{e^{2x}} = \frac{2(e^{2x} + 2e^{x} - 2)}{e^{2x}}$; $\quad D_{f^*} = \mathbb{R}$

Der Graph G_g einer Funktion $g: x \mapsto g(x)$; $D_g = D_{g\,max}$ wird in Richtung der y-Achse so verschoben, dass er durch den Punkt $S\,(0 \mid t)$ verläuft.

g^*: $g^*(x) = g(x) + t$

Delta 11 Lösungen S. 164 / 2 a - h; 7 a, b

2. a) $y' = 2xe^e = 2e^e \cdot x$

b) $y' = 2e^x - 2e^{2x} = 2e^x(1 - e^x)$

c) $y' = e^{1-x} = + xe^{1-x} \cdot (-1) = e^{1-x}(1 - x)$

d) $y' = 4e^x + 4(x - 1)e^x = 4e^x(1 + x - 1) = 4xe^x$

e) $y' = 2(2 - e^x) \cdot (-e^x) = -2e^x(2 - e^x)$

f) $y' = e^{1-0,5x^2} \cdot (-2 \cdot 0,5x) = -xe^{1-0,5x^2}$

g) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$

$-2e^{-x} - (-2)e^{-2x} = -2e^{-x} + 2e^{-2x} = -\frac{2}{e^x} + \frac{2}{e^{2x}} = \frac{2(1 - e^x)}{e^{2x}}$

oder

$y' = \frac{e^{2x} \cdot 2e^x - (2e^x - 1)2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{2e^x - 4e^x + 2}{e^{2x}} = \frac{2 - 2e^x}{e^{2x}} = \frac{2(1 - e^x)}{e^{2x}}$

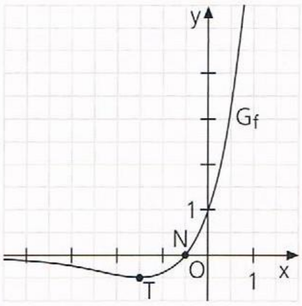
h) $y' = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

7. a) $f'(x) = 2e^x + (2x + 1)e^x = e^x(2x + 3)$

$f'(x) = 0$: $x = -1,5$

Monotonietabelle:

x	$-\infty < x < -1,5$	$x = -1,5$	$-1,5 < x < +\infty$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$		von – nach +	
G_f	fällt streng monoton	hat einen Tiefpunkt $T(-1,5 \mid -2^{-1,5})$	steigt steng monoton



b) $f(x) = (2 - e^x)^2$

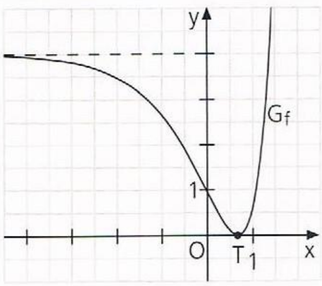
$f'(x) = 2(2 - e^x) \cdot (-e^x) = 2e^x(2 - e^x)$

$f'(x) = 0$; $e^x = 2$; $x = \ln 2$

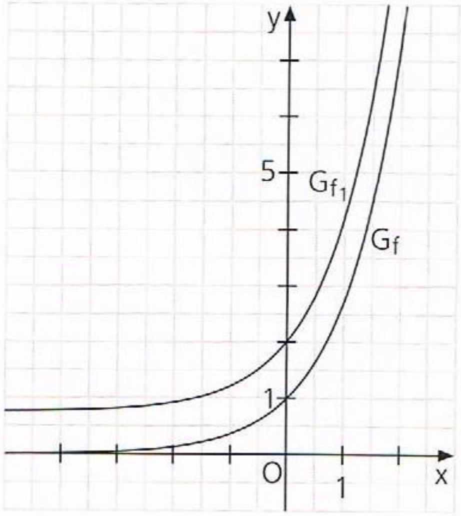
$f(\ln 2) = (2 - 2)^2 = 0$

Monotonietabelle:

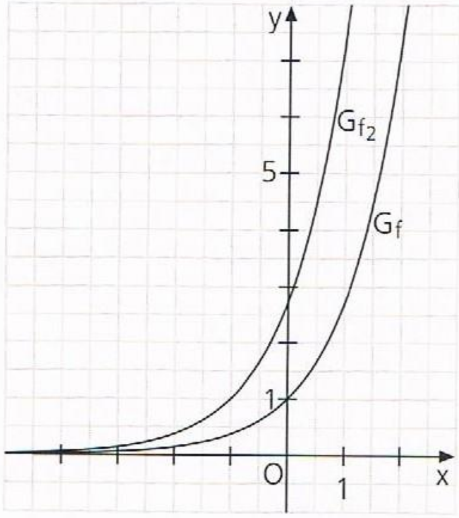
x	$-\infty < x < \ln 2$	$x = \ln 2$	$\ln 2 < x < +\infty$
$f'(x)$	$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$
Vorzeichenwechsel von $f'(x)$		von – nach +	
G_f	fällt streng monoton	hat einen Tiefpunkt $T(\ln 2 \mid e)$ 0	steigt steng monoton



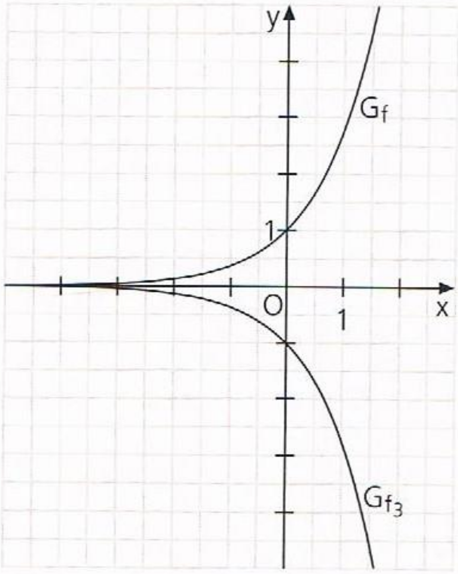
15. a) f_1: $f_1(x) = e^x + 2$, $D_{f_1} = \mathbb{R}$



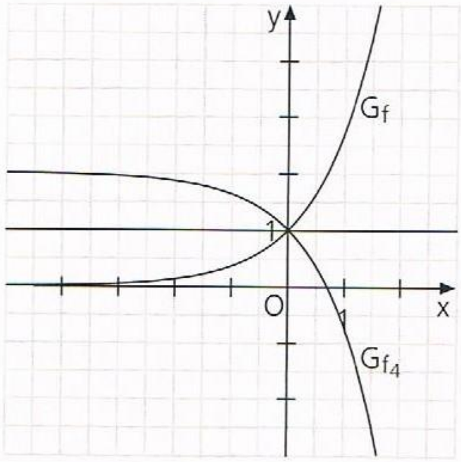
b) f_2: $f_2(x) = e^{x+1}$; $D_{f_2} = \mathbb{R}$



c) f_3: $f_3(x) = -e^x$; $D_{f_3} = \mathbb{R}$

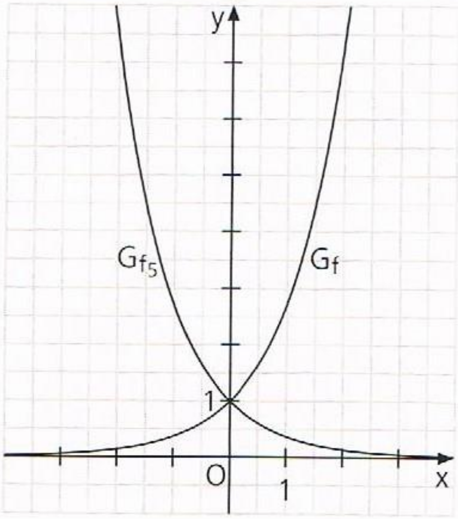


d) f_4: $f_4(x) = -e^{x} + 2$; $D_{f_4} = \mathbb{R}$



Hinweis zu d): G_f wird zuerst an der x-Achse gespiegelt (y wird durch −y ersetzt); dann wird der neue Graph um 2 in Richtung der y-Achse nach oben verschoben.

e) f_5: $f_5(x) = e^{-x}$; $D_{f_5} = \mathbb{R}$



f) f_6: $f_6(x) = -e^{-x}$; $D_{f_6} = \mathbb{R}$