Seite 159 /3

3. a) $f'(x) = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$; $f'(4) = \frac{3}{4}$

b) $f'(x) = \frac{1 \cdot 2}{2x+3} = \frac{2}{2x+3}$; $f'(1) = \frac{2}{5}$

c) $f'(x) = \frac{\ln x \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$; $f'(2) = \frac{\ln 2 - 1}{(\ln 2)^2} \approx -0{,}64$

d) $f(x) = x \ln x - x$;
$f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$;
$f'(e) = \ln e = 1$

e) $f(x) = e^{x \ln x}$;
$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + \frac{x}{x}) =$
$= e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1)$;
$f'(1) = e^0 \cdot (0 + 1) = 1$

f) $f(x) = \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$;
$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$;
$f'(e^{-4}) = \frac{1}{2e^{-4}} = \frac{e^4}{2} \approx 27{,}30$

S. 159 / 2

2. a) $2x - 1 = 1$; $2x = 2$; $x = 1 \in G$ $\quad L = \{1\}$

b) $\ln x - 2 = 0$; $\ln x = 2$; $x = e^2 \in G$
$x = 0 \notin G$ $\quad L = \{e^2\}$

c) $x^2 + 1 = 1$; $x = 0 \in G$ $\quad L = \{0\}$

d) $\ln (x^2) = 2$; $x^2 = e^2$;
$x_1 = -e \in G$; $x_2 = e \in G$
$\ln (x^2) = 0$; $x_3 = -1 \in G$; $x_4 = 1 \in G$ $\quad L = \{-e; -1; 1; e\}$

e) $(x - 5)(x - 1) = 0$; $x_1 = 5 \in G$; $x_2 = 1 \in G$; $\quad L = \{1; 5\}$

f) $(\ln x - 5) \cdot (\ln x - 1) = 0$;
$\ln x = 5$; $x_1 = e^5 \in G$;
$\ln x = 1$; $x_2 = e \in G$ $\quad L = \{e; e^5\}$

S. 164 / 4

4. a) $\ln (\ln e) = \ln 1 = 0$

b) $[\ln (e^2)]^2 + 2 \ln e = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$

c) $\ln (e^2) + \ln \left(\frac{1}{e^2}\right) - 3 \ln (e^3) + e^{\ln 2} = 2 + (-2) - 3 \cdot 3 + 2 = -7$

d) $\ln (3e) - \ln (e^3) - \ln 3 = \ln 3 + \ln e - 3 \ln e - \ln 3 = 1 - 3 = -2$

S. 167 / 18

18. $d_{max} = \lim\limits_{t \to \infty} d(1) = 1$

$\frac{1}{1 + e^{-0{,}05(t-60)}} = 0{,}9$

$\frac{10}{9} = 1 + e^{-0{,}05(t-60)}$

$e^{-0{,}05(t-60)} = \frac{1}{9}$

$-0{,}05(t - 60) = \ln \frac{1}{9}$

$t - 60 = -\frac{1}{0{,}05} \cdot \ln \frac{1}{9}$

$t = 60 - 20 \ln \frac{1}{9} \approx 104$

Nach etwa 104 Jahren hat die Fichte 90% ihrer maximalen Durchmesserlänge erreicht.

S. 167 / 19

19. a) $f(t) = 10 + t^2e^{4-t}$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f(t)	10	30,1	39,6	34,5	26	19,2	14,9	12,4	11,2	10,5	10,2

b) $f'(t) = 2te^{4-t} + t^2 \cdot (-1)e^{4-t} = e^{4-t} \cdot t(2-t)$;
$f''(t) = -e^{4-t}(2t - t^2) + e^{4-t}(2 - 2t) = e^{4-t}(-2t + t^2 + 2 - 2t) = e^{4-t}(t^2 - 4t + 2)$
$f'(t) = 0; \quad (t_1 = 0) \quad t_2 = 2$
$f''(2) = e^2(4 - 8 + 2) = -2e^2 < 0$
Nach 2 Stunden ist der Bestand am größten.

c) Im Zeitintervall $0\text{ h} < t < 2\text{ h}$ wächst die Population; im Zeitintervall $2\text{ h} < t < 10\text{ h}$ nimmt sie ab.
$f''(t) = 0$
Da $e^{4-t} \neq 0$ ist, gilt
$t^2 - 4t + 2 = 0;$
$t_{3,4} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2};$
$t_3 \approx 3{,}41; \quad t_4 \approx 0{,}59$
$f'''(t) = -e^{4-t}(t^2 - 4t + 2) + e^{4-t}(2t - 4) = e^{4-t}(2t - 4 - t^2 + 4t - 2) = e^{4-t}(-t^2 + 6t - 6);$
$f'''(2 + \sqrt{2}) \approx 5{,}1 > 0$
$f'''(2 - \sqrt{2}) \approx -80 < 0$
Nach etwa 0,6 h ist die Zunahme am größten; nach etwa 3,4 h ist die Abnahme am größten.