Hallo, bitte schicke mir **die ersten drei Seiten / Aufgaben** dieses Blatt bis **Dienstag Abend, 5.5.20**, zurück.

1. Schreibe die Funktionen zunächst ohne Wurzelzeichen und bilde dann die erste Ableitung. Du musst nicht vereinfachen.

a) $f(x) = x \cdot \sqrt{x}\,, x > 0$ (Produktregel!)

$$\boldsymbol{f'(x) = 1 \cdot x^{\frac{1}{2}} + x \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = 1{,}5\sqrt{x}}$$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x}\,, x > 0$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}}$$

c) $f(x) = cos\sqrt{x}\,, x > 0$ Kettenregel (Nachdifferenzieren)

$$\boldsymbol{f'(x) = -sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot sin\sqrt{x}}$$

d) $f(x) = sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ Kettenregel (Nachdifferenzieren)

$$\boldsymbol{f'(x) = cos\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

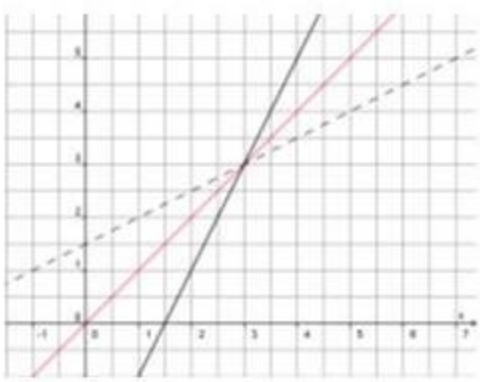
e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 26}$ Kettenregel (Nachdifferenzieren)

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 26)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 26)^2}}}$$

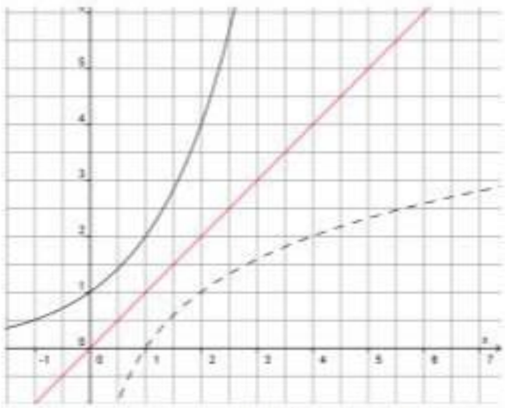
f) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\boldsymbol{f'(x) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x) = -4x \cdot (x^2 + 1)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{4x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}$$

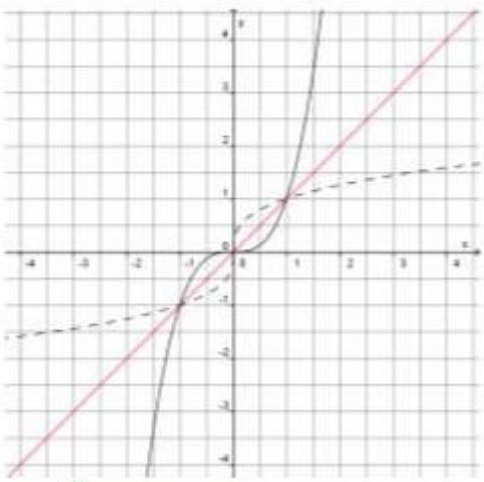
2. Geben Sie jeweils den Funktionsterm an und zeichnen Sie die Umkehrfunktion ein.



y = 2x-3 ist umkehrbar



y =2^x ist umkehrbar



y =x^3 ist umkehrbar

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-1}$

a) Ermittle den Definitionsbereich und gib den Wertebereich (Überlegen: kleinster, größter y-Wert?) an.

Definitionsmenge: $\sqrt{x-1} > 0$ => $x \geq 1$ $D_f = [1; \infty[$
Wertemenge: $W_f = [0; \infty[$

b) Zeige, dass die Funktion umkehrbar ist. (Tipp: Monotonie anschauen)

$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-1} = 2(x-1)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$f'(x)$ hat keine Nullstelle und $f'(x) > 0$ für alle $x \in D_f$

=> G_f ist in D_f streng monoton steigend => f ist umkehrbar in D_f

c) Bestimme **rechnerisch** die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$

Tausche x und y: $x = 2\sqrt{y-1}$ $|:2$

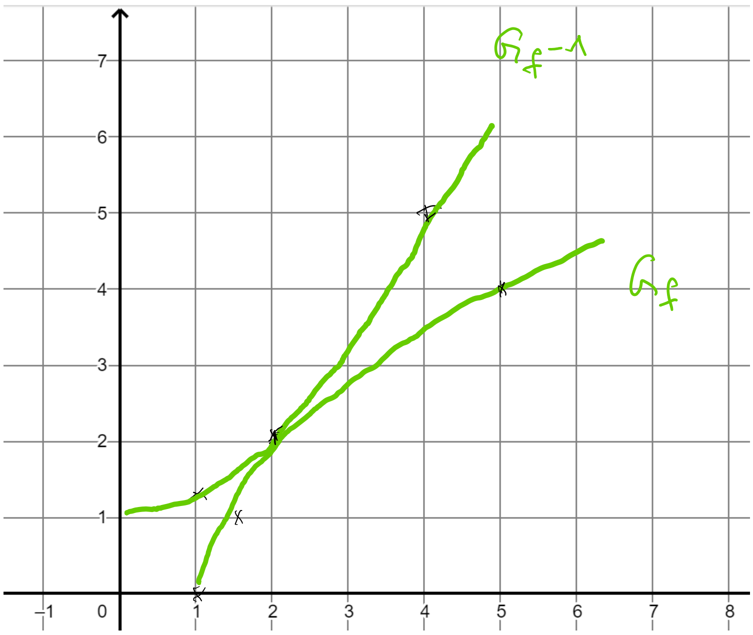
Löse nach y auf: $\frac{1}{2}x = \sqrt{y-1}$ $|^2$

$\frac{1}{4}x^2 = y - 1$ $|+1$

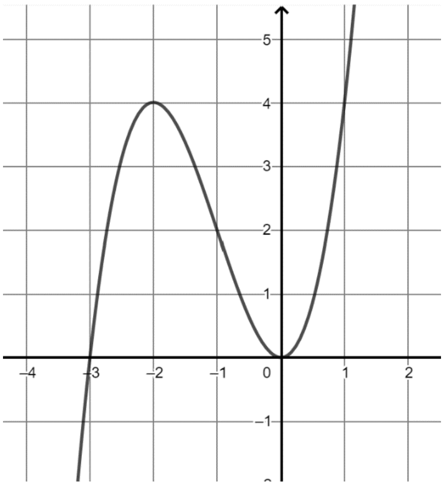
$\frac{1}{4}x^2 + 1 = y$

$f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ $D_{f^{-1}} = [0; \infty[= W_f$ $W_{f^{-1}} = [1; \infty[= D_f$

d) Zeichne den Graphen f(x) und die zugehörige Umkehrfunktion.



4. Markiere mit verschiedenen Farben Bereiche, in denen die Funktion umkehrbar wäre.



5. Bestimme möglichst große Teilmengen von $ID_{f\,max}$ so, dass die Einschränkung von f dort umkehrbar ist.
Gib die Umkehrfunktionen an.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Lösung: $\boldsymbol{D_{g_{max}} = IR}$

Monotonie: $\boldsymbol{g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}}$

$\boldsymbol{g'(x) = 0}$ $\boldsymbol{\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0}$

$\boldsymbol{-2x = 0}$ => x = 0

Monotonietabelle:

	$-\infty < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \infty$
$g'(x)$	+	0	-
G_f	sms	Maximum	smf

Tausche x und y: $x = \frac{1}{1+y^2}$ $|\cdot (1 + y^2)$

Löse nach y auf: $x \cdot (1 + y^2) = 1$ $|: x$ ☝ $x \neq 0$

$1 + y^2 = \frac{1}{x}$ $|- 1$

$y^2 = \frac{1}{x} - 1$ $|\ \sqrt{}$

☝ **Achtung:** Es gibt 2 Lösungen!

$y_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

Umkehrfunktion: $D_g =]-\infty; 0[$ $g^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$

$D_g =]0; \infty[$ $g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1}$